Задание № 24 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**30.7 Общее решение линейного однородного уравнения**

**Д30.7.1 Определение.** Множество  решений линейного однородного уравнения порядка , определенных и линейно независимых в интервале , называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

**Д30.7.5 Теорема (о структуре общего решения)** Если  - фундаментальная система решений дифференциального уравнения , то функция , где  - произвольные постоянные, является общим решением уравнения .

30.10 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть теперь функции - это заданные числа. Будем искать решение уравнения  в виде . Тогда …, . Подставим функцию  и ее производные в дифференциальное уравнение: . Сократим равенство на : . Таким образом, функция  будет решением уравнения  тогда и только тогда, когда число  является корнем алгебраического уравнения .

Д30.10.1 Определение: Уравнение  называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения

.

Рассмотрим отдельно четыре случая.

Д30.10.2 Случай 1: Пусть характеристическое уравнение имеет ровно n различных действительных корней . Тогда каждая из функций  является решением уравнения . Поскольку, в соответствии с примером предыдущей лекции, эти функции линейно независимы и их ровно n , то  - фундаментальная система решений дифференциального уравнения.

*Пример:* Найти общее решение уравнения 

*Решение:* Составим характеристическое уравнение: . Корни этого уравнения равны , значит, фундаментальная система решений состоит из функций , и, следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид .

Д30.10.3 Случай 2: Все корни характеристического уравнения различны, но среди них не все корни действительны.

Пусть - комплексный корень характеристического уравнения и . Тогда, поскольку коэффициенты характеристического уравнения – действительные числа, то число  также является корнем характеристического уравнения.

По теореме о свойствах решений линейного однородного уравнения каждая из функций  является решением этого уравнения. Определитель Вронского этих функций равен





, значит, эти функции линейно независимы.

 и, значит, корню  в фундаментальной системе решений соответствуют функции . Добавление любой из этих функций в множество функций  делает это множество линейно зависимым. Значит, каждой паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения соответствует в фундаментальной системе пара линейно независимых функций.

Пусть  - все корни характеристического уравнения, эти корни попарно различны и  - действительные числа,  - комплексные, но не действительные числа. Тогда каждому действительному числу  в фундаментальной системе решений соответствует функция , а каждой паре комплексно сопряженных чисел – пара линейно независимых функций . Общее количество функций в фундаментальной системе решений равно количеству корней характеристического уравнения и, в соответствии с примером предыдущей лекции, все эти функции линейно независимы.

*Пример 1:* Найти общее решение дифференциального уравнения .

*Решение:* Решим характеристическое уравнение : ; ; . По формуле Эйлера , значит, фундаментальная система решений состоит из функций  и общее решение имеет вид



*Пример 2:* Решить задачу Коши , , , 

*Решение:* составим и решим характеристическое уравнение: ; ; , 

Общее решение: .

Найдем значения постоянных : , 







Решим систему : 



Решение задачи Коши: .

Д30.10.4 Случай 3: характеристическое уравнение имеет кратные действительные корни. Пусть действительный корень  имеет кратность k, тогда многочлен  можно представить в виде , при этом число  не будет являться корнем многочлена . Можно показать, что функции  являются решениями уравнения . Таким образом, каждому корню кратности k в фундаментальной системе решений соответствуют ровно k линейно независимых функций и общее количество таких функций совпадает с порядком дифференциального уравнения.

*Пример:* Найти общее решение уравнения 

*Решение:* Характеристическое уравнение  имеет корни , фундаментальная система решений состоит из функций  и общее решение имеет вид .

Д30.10.5 Случай 4: характеристическое уравнение имеет кратные комплексные корни.

В этом случае, если кратность комплексного корня  равна k, то ему соответствуют комплексные решения . Воспользовавшись формулой Эйлера и теоремой о свойствах решений линейного однородного уравнения, получим, что функции



входят в фундаментальную систему решений дифференциального уравнения.

*Пример*: найти общее решение уравнения 

*Решение:* Характеристическое уравнение  имеет корни , т.е. уравнение имеет пару двукратных комплексно сопряженных корней . Значит, фундаментальная система состоит из функций  и общее решение имеет вид

.

**Самостоятельная работа:**

19.2.2. Найти общие решения ДУ: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

19.2.3. Найти общие решения ДУ: а) ; б); в) ; г) ;

19.2.5. Решить задачи Коши: а) , ; б) , ; в) , ; г) , ;

19.2.6. Решить краевые задачи: а) , ; б) , ; в) , ; г) , ;

20.1.2. Найти общие решения линейных однородных ДУ третьего порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

20.1.3. Найти общие решения линейных однородных ДУ четвертого порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) 

20.1.4. Найти общие решения линейных однородных ДУ порядков выше четвертого: а) ; б) ; в) ; г) ;

20.1.5. Найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям (задача Коши): а),; б) , ;

**Ответы:**

**19.2.2.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

**19.2.3.** а) ; б) ; в) ; г) ;

**19.2.5.** а) , б) , в) , г) ,

**19.2.6.** а) , б) , в) , г) ;

**20.1.2.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**20.1.3.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) ;

**20.1.4.**а); б); в); г) ;

**20.1.5.** а); б) ,